

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

1. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

a.
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{4} = \frac{e^x \times (-e^{-x})}{e^x \times (1 + e^{-x})} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{e^x + 1} + \frac{e^x + 1}{4(e^x + 1)} = \frac{-4 + e^x + 1}{4(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$$

b. Sur \mathbb{R} , $f'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.

$$e^x - 3 \geq 0 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln(3)$$

Donc :

- sur $] -\infty; \ln(3)[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante;
- sur $] \ln(3); +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante;
- la fonction f admet pour $x = \ln(3)$ un minimum.

- c.
- $\ln(3) \approx 1,1$ donc $[2 ; 5] \subset]\ln(3) ; +\infty[$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2 ; 5]$.
 - $f(2) = \ln(1 + e^{-2}) + \frac{1}{4} \times 2 \approx 0,63$ donc $f(2) < 1$.
 - $f(5) = \ln(1 + e^{-5}) + \frac{1}{4} \times 5 \approx 6,25$ donc $f(5) > 1$.
 - De plus, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} donc continue.

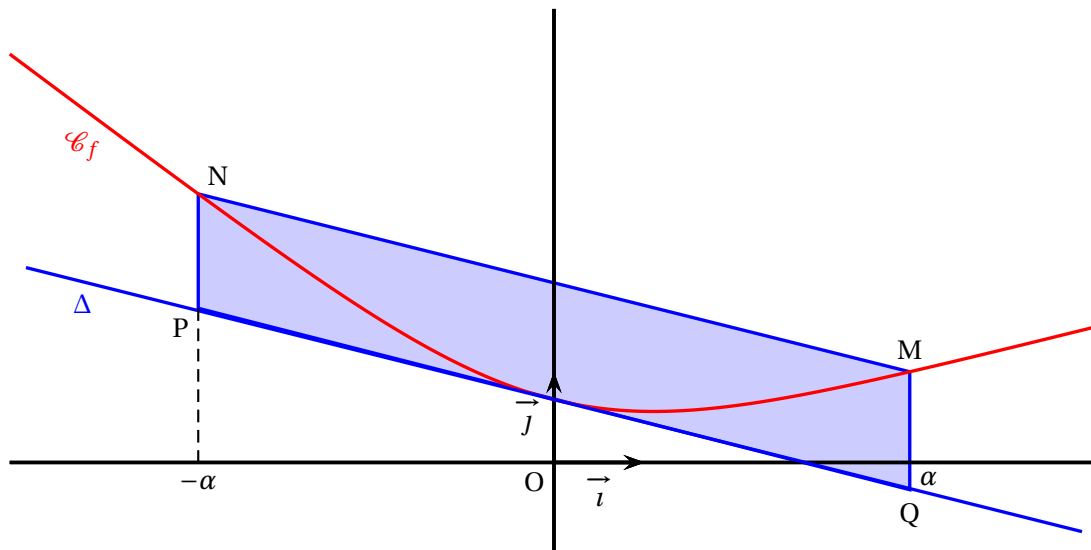
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $[2 ; 5]$. On l'appelle α .

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C}_f la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. a. Pour tout réel x :

- $e^x > 0$;
- $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ donc $(e^x + 1)^2 > 0$.

$$\text{Donc } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0.$$

b. Pour tout réel x , $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe; sa courbe représentative est donc située au-dessus de toutes ses tangentes, donc au-dessus de Δ .

De plus, comme la fonction f est convexe, sa courbe représentative entre les points M et N est située en-dessous de la sécante (MN).

Donc la portion de la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[-\alpha ; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \mathbf{a.} \quad f(-\alpha) &= \ln(1 + e^\alpha) - \frac{1}{4}\alpha = \ln(e^\alpha(e^{-\alpha} + 1)) - \frac{1}{4}\alpha = \ln(e^\alpha) + \ln(e^{-\alpha} + 1) - \frac{1}{4}\alpha \\
 &= \alpha + \ln(e^{-\alpha} + 1) - \frac{1}{4}\alpha = \ln(e^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b.} \quad \text{On sait que } f(\alpha) = 1, \text{ donc } \ln(1 + e^{-\alpha}) + \frac{1}{4}\alpha = 1 \text{ et donc } \ln(1 + e^{-\alpha}) = 1 - \frac{1}{4}\alpha.$$

$$\text{Donc comme } f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha, \text{ on a : } f(-\alpha) = 1 - \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

Les points M et N ont respectivement pour coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ et $(-\alpha; f(-\alpha))$ donc le coefficient directeur de la droite (MN) est égal à :

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{1 - (1 + \frac{1}{2}\alpha)}{2\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}\alpha}{2\alpha} = -\frac{1}{4}$$

La droite Δ est tangente en 0 à la courbe \mathcal{C}_f ; donc son coefficient directeur est

$$\text{égal à : } f'(0) = \frac{e^0 - 3}{4(1 + e^0)} = \frac{1 - 3}{4(1 + 1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Les droites (MN) et Δ ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles, donc (MN) // (QP).

Par construction, les droites (MQ) et (NP) sont parallèles.

On peut donc en déduire que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.